ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σχολικό σελίδα 15

β)

i. Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

ii. Μια συνάρτηση $g : f(\mathrm{A}) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Από τον τρόπο αυτό ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$ της f
- Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

Α2. Σχολικό σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α4.

α) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $f(0) = 0$

Α5. Σωστή απάντηση είναι το (γ) 4

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=e^{-x}+\lambda,\ \ \mathrm{A}_f:\mathbb{R}$

Β1.

Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

Β2. Θεωρώ $g(x)=f(x)-x$ η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=-e^{-x}-1<0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[2,3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

$$\left.\begin{aligned} g(2)&=f(2)-2=e^{-2}+2-2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}>0\\ g(3)&=f(3)-3=e^{-3}+2-3=e^{-3}-1=\frac{1}{e^3}-1<0\end{aligned}\right\} g(2)\cdot g(3)<0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-x_0=0$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}<0$, οπότε η fείναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, οπότε $f(\mathrm{A})=(2,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται $y=f(x)\Rightarrow y=e^{-x}+2\Rightarrow \ln(y-2)=-x\Rightarrow x=-\ln(y-2)$.

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $\mathrm{A}_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})=(2,+\infty)$

Β4. $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=-\infty$ άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$f(x)=e^{-x}+2,A_f:\mathbb{R}$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x)=e^{-x}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	7	2

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $A_{f^{-1}} : (2,+\infty)$

Η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$

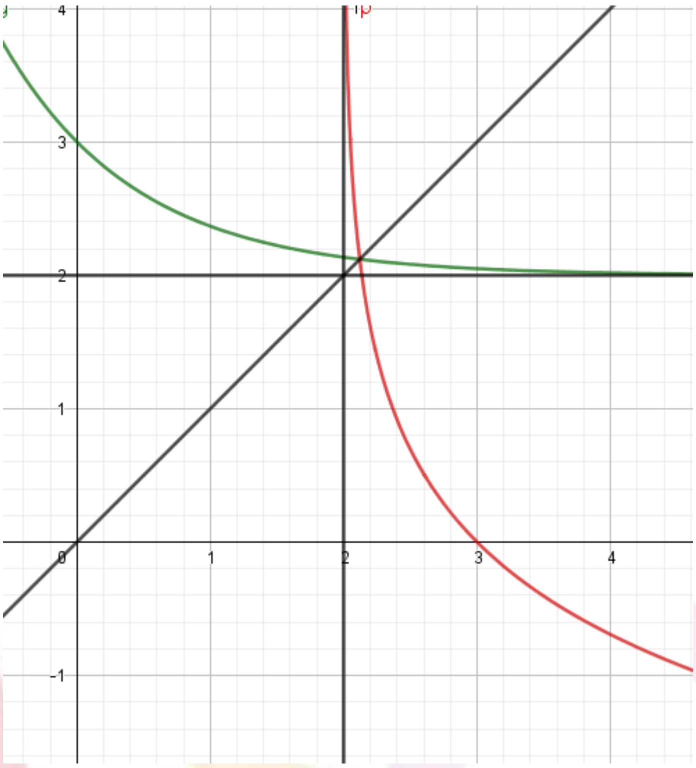
Η $\left(f^{-1}\right)'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$, με $\left(f^{-1}\right)''(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$ άρα η f^{-1} είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} \underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{dlh}{=}} \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-2} = 0 = \lambda$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x) - \lambda x\right) = -\infty$, άρα δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\left(f^{-1}\right)'(x)$				$-$	
$\left(f^{-1}\right)''(x)$				$+$	
$f^{-1}(x)$			$+\infty$	7	$-\infty$

Θα πρέπει να σχεδιάσουμε και την $y = x$ η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.



Η μελέτη της αντίστροφης θα μπορούσε να μην γίνει και να φτιάξω μια πρόχειρη γραφική παράσταση με την βοήθεια της συμμετρίας ως προς την $y = x$

*Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν με την μετατόπιση των γραφικών παραστάσεων από την διδαχθείσα ύλη της Β’ Λυκείου.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \beta+1 = 1+\alpha \Rightarrow \beta=\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(a+1)}{x-1} \overset{dlh}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} = \beta+1\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-(a+1)}{x-1} \overset{dlh}{=} \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2\end{aligned}\right\}\beta+1=2 \Leftrightarrow \beta=1$$

Άρα α=1.

Επομένως $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\ge 1 \\ e^{x-1}+x & , \quad x<1\end{cases}$

Γ2. Για $x\ge 1$ έχω $f'(x)=2x>0$ για κάθε $x\ge 1$.

Για $x<1$ έχω $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x<1$.

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα $f(A)=\mathbb{R}$

Γ3.

i. Έχω $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1$ άρα $f\big((-\infty,0)\big)=(-\infty,1)$ αφού $0\in(-\infty,1)$ άρα υπάρχει $x_0\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ το οποίο είναι και μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

ii. $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot\big(f(x)-x_0\big)=0$ άρα

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$ άτοπο αφού $x_0\notin(x_0,+\infty)$

Ή $f(x)-x_0=0$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)-x_0=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Θεωρώ $g(x)=f(x)-x_0$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-x_0) = -x_0 > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Άρα $g(A) = (-x_0, +\infty)$ και $0 \notin g(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) - x_0 = 0$ είναι αδύνατη.

Γ4. Το σημείο $\mathrm{M}(x(t), y(t))$ κινείται στην καμπύλη $y = f(x)$

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με βάση $x(t)$ και ύψος $y(t) = x^2(t) + 1$ με $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$

$$E(t) = \frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{2}\cdot x^3(t) + \frac{1}{2}\cdot x(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^2(t)\cdot x'(t) + \frac{1}{2}\cdot x'(t)$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 27 + 1 = 28\ m/s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2) + \alpha x + \beta$ με $D_f = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα και γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x-1, \ln(x^2-2x+2)$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x^2-2x+2, \ln x$) και $\alpha x + \beta$ με

$$f'(x) = [(x-1)\ln(x^2-2x+2) + \alpha x + \beta]' = \ln(x^2-2x+2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \alpha$$

Η (ε) εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$ άρα ισχύουν

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$
- $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Άρα α = - 1 και β = 2.

Δ2. Η f και η $y = -x + 2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$\mathrm{E} = \int_1^2 \left|(x-1)\ln(x^2-2x+2) - x + 2 + x - 2\right| dx = \int_1^2 \left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right| dx$$

Πρόσημο της $\varphi(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2)$ στο $[1,2]$

- $1 \le x \le 2 \Rightarrow x - 1 \ge 0$
- $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \ge 0$

Άρα $\varphi(x)\ge 0$ στο $[1,2]$.

Οπότε $E=\int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$

Θέτω $u=x^2-2x+2 \Leftrightarrow du=2(x-1)dx$

Για $x=1 \Rightarrow u=1$

Για $x=2 \Rightarrow u=2$

Άρα $E=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\ln 2-\frac{1}{2}$.

Δ3.

i. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα , πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$f''(x)=[\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1]'=\dfrac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2-2x+4=0$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-12<0$. Όποτε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f'(1)=-1$ και ισχύει $f'(x)\ge -1$.

ii. $f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda \ge (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\ge f(\lambda)-2+\frac{3}{2} \Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\ge f(\lambda)-\frac{1}{2}$

Θεωρώ διάστημα $[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}]$

- f συνεχής στο $[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$

Άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}=2(f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda))$

Όμως ισχύει $f'(\xi)\ge -1 \Leftrightarrow 2(f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda))\ge -1 \Rightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\ge f(\lambda)-\frac{1}{2}$.

Δ4. Η g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x)=-3x^2-1$. Έστω $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ σημεία επαφής των C_f,C_g με τις εφαπτόμενες με εξισώσεις :

$(\varepsilon_1): y=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)x_1$

$(\varepsilon_2): y=g'(x_2)x+g(x_2)-g'(x_2)x_2$

Για να έχουν οι C_f,C_g κοινή εφαπτόμενη πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ (1) και $f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$ (2)

Παρατηρώ ότι $f'(1)=-1$, $g'(0)=-1$, οπότε (1) επαληθεύεται με $x_1=1$ και $x_2=0$. Τότε η (2) γράφεται $f(1)-f'(1)=g'(0)-0 \Leftrightarrow 1+1=2$, που ισχύει.

Οπότε οι C_f,C_g έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτόμενη.

- Για την $g'(x)=-3x^2-1$ έχουμε $g''(x)=-6x$ και ισχύουν g' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 με $g'(0)=-1$ και ισχύει $g'(x)\le g'(0)$.
- Από Δ3. η η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f'(1)=-1$ και ισχύει $f'(x)\ge -1$.

Άρα οι C_f,C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτόμενη στα σημεία $A(1,1),B(0,2)$ η οποία είναι η $y=-x+2$.

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει $g'(x)=-3x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Η $(\varepsilon): y=-x+2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$.

Έστω $B(x_2,g(x_2))$ σημείο επαφής της C_g με εφαπτομένη της ε_2 και έστω

$g'(x_2)=-1 \Leftrightarrow -3x^2-1=-1 \Leftrightarrow x_2=0$

Τότε η (ε_2) είναι: $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-2=-x \Leftrightarrow y=-x+2$

Δηλαδή η (ε) είναι εφαπτομένη και της C_g, οπότε είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως στο 1ο τρόπο.

<u>3ος τρόπος</u>

Από τον 1ο τρόπο και την (1) έχουμε $\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)+\dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1=-3x_2^2-1$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}=-3x_2^2$$

Παρατηρούμε ότι $-3x_2^2 \le 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x_2 = 0$ και ότι $\ln\left(x_1^2 - 2x_1 + 2\right) + \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} \ge 0$

$\left(x_1^2 - 2x_1 + 2 \ge 1 \Leftrightarrow \ln\left(x_1^2 - 2x_1 + 2\right) \ge 0 \text{ και } \frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} \ge 0 \right)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x_1 = 1$.

Οπότε στα $A(1,1)$, $B(0,2)$ οι C_f, C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Επιμέλεια απαντήσεων: Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Βαλιάδη Μαρία, Νατάσα Παπαγούλα, Ηλίας Κουντούπης