

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σχολικό σελίδα 15

β)

- i. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$
- ii. Μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Από τον τρόπο αυτό ορίστηκε η g προκύπτει ότι:
 - Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f
 - Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

Α2. Σχολικό σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α4.

α) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ β) Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $f(0) = 0$

Α5. Σωστή απάντηση είναι το (γ) 4

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = e^{-x} + \lambda, \quad A_f : \mathbb{R}$$

B1.

Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

B2. Θεωρώ $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι ορισμένη στο \mathbb{R} .

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= f(2) - 2 = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ g(3) &= f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} g(2) \cdot g(3) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα και 1-1.

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = -e^{-x} < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, οπότε $f(A) = (2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται $y = f(x) \Rightarrow y = e^{-x} + 2 \Rightarrow \ln(y - 2) = -x \Rightarrow x = -\ln(y - 2)$.

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$ με $A_{f^{-1}} = f(A) = (2, +\infty)$

B4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$f(x) = e^{-x} + 2, \quad A_f : \mathbb{R}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f''(x) = e^{-x} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f''(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	2

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R}

$$f^{-1}(x) = -\ln(x-2), A_{f^{-1}} : (2, +\infty)$$

Η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$

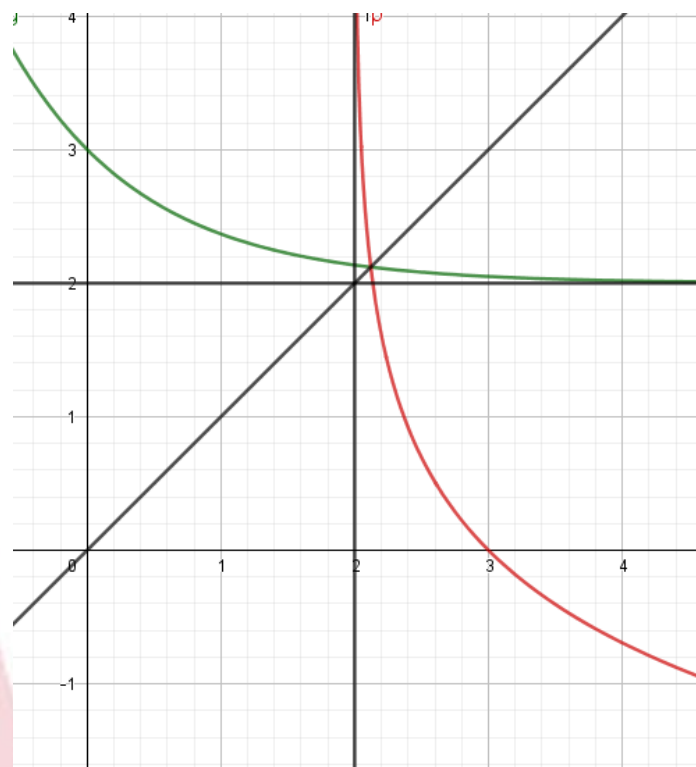
Η $(f^{-1})'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$, με $(f^{-1})''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$ άρα η f^{-1} είναι κυρτή στο $(2, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} \stackrel{dlh}{=} \lim_{\substack{-\infty \\ +\infty}} -\frac{1}{x-2} = 0 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1}(x) - \lambda x) = -\infty, \text{ άρα δεν έχει ασύμπτωτες στο } +\infty$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$			-
$(f^{-1})''(x)$			+
$f^{-1}(x)$		$+\infty$	$-\infty$

Θα πρέπει να σχεδιάσουμε και την $y = x$ η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.



Η μελέτη της αντίστροφης θα μπορούσε να μην γίνει και να φτιάξω μια πρόχειρη γραφική παράσταση με την βοήθεια της συμμετρίας ως προς την $y = x$

*Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν με την μετατόπιση των γραφικών παραστάσεων από την διδαχθείσα ύλη της Β' Λυκείου.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα και συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \beta + 1 = 1 + \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (a+1)}{x - 1} \stackrel{dlh}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = \beta + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - (a+1)}{x - 1} \stackrel{dlh}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \end{aligned} \right\} \beta + 1 = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα $\alpha = 1$.

Επομένως $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \geq 1 \\ e^{x-1} + x & , x < 1 \end{cases}$

Γ2. Για $x \geq 1$ έχω $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Για $x < 1$ έχω $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ για κάθε $x < 1$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Γ3.

i. Έχω $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$ άρα $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 1)$ αφού $0 \in (-\infty, 1)$ άρα υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ το οποίο είναι και μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

ii. $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0$ άρα
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ άτοπο αφού $x_0 \notin (x_0, +\infty)$

Η $f(x) - x_0 = 0$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - x_0 = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - x_0$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x_0) = -x_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Άρα $g(A) = (-x_0, +\infty)$ και $0 \notin g(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) - x_0 = 0$ είναι αδύνατη.

Γ4. Το σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται στην καμπύλη $y = f(x)$

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με βάση $x(t)$ και ύψος $y(t) = x^2(t) + 1$ με $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) = \frac{1}{2} \cdot x^3(t) + \frac{1}{2} \cdot x(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^2(t) \cdot x'(t) + \frac{1}{2} \cdot x'(t)$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 27 + 1 = 28 \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ με $D_f = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως άθροισμα και γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x-1, \ln(x^2 - 2x + 2)$ (σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x^2 - 2x + 2, \ln x$) και $\alpha x + \beta$ με

$$f'(x) = [(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta]' = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

Η (ε) εφάπτεται της C_f στο $A(1,1)$ άρα ισχύουν

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$
- $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Δ2. Η f και η $y = -x + 2$ είναι συνεχείς στο \mathbb{R} , οπότε

$$E = \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2| dx = \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)| dx$$

Πρόσημο της $\varphi(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)$ στο $[1, 2]$

- $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 0$
- $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln[(x - 1)^2 + 1] \geq 0$

Άρα $\varphi(x) \geq 0$ στο $[1, 2]$.

Οπότε $E = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$

Θέτω $u = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow du = 2(x-1) dx$

Για $x = 1 \Rightarrow u = 1$

Για $x = 2 \Rightarrow u = 2$

Άρα $E = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} du = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Δ3.

i. $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα, πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχής στο \mathbb{R} .

$$f''(x) = [\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1]' = \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $x^2 - 2x + 4 = 0$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -12 < 0$. Οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f'(1) = -1$ και ισχύει $f'(x) \geq -1$.

ii. $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Rightarrow f(\lambda + \frac{1}{2}) \geq f(\lambda) - 2 + \frac{3}{2} \Rightarrow f(\lambda + \frac{1}{2}) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$

Θεωρώ διάστημα $[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}]$

- f συνεχής στο $[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$

Άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$ με $f'(\xi) = \frac{f(\lambda + \frac{1}{2}) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} = 2(f(\lambda + \frac{1}{2}) - f(\lambda))$

Όμως ισχύει $f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow 2(f(\lambda + \frac{1}{2}) - f(\lambda)) \geq -1 \Rightarrow f(\lambda + \frac{1}{2}) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$.

Δ4. Η g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x) = -3x^2 - 1$. Έστω $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτόμενες με εξισώσεις :

$$(\varepsilon_1): y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$$

$$(\varepsilon_2): y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για να έχουν οι C_f, C_g κοινή εφαπτόμενη πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$ (1) και $f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$ (2)

Παρατηρώ ότι $f'(1) = -1, g'(0) = -1$, οπότε (1) επαληθεύεται με $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$. Τότε η (2) γράφεται $f(1) - f'(1) = g'(0) - 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$, που ισχύει.

Οπότε οι C_f, C_g έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτόμενη.

- Για την $g'(x) = -3x^2 - 1$ έχουμε $g''(x) = -6x$ και ισχύουν g' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα η g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 με $g'(0) = -1$ και ισχύει $g'(x) \leq g'(0)$.
- Από Δ3. η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f'(1) = -1$ και ισχύει $f'(x) \geq -1$.

Άρα οι C_f, C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτόμενη στα σημεία $A(1,1), B(0,2)$ η οποία είναι η $y = -x + 2$.

2^{ος} τρόπος

Ισχύει $g'(x) = -3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

Η $(\varepsilon): y = -x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1,1)$.

Έστω $B(x_2, g(x_2))$ σημείο επαφής της C_g με εφαπτομένη της ε_2 και έστω

$$g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Τότε η (ε_2) είναι: $y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$

Δηλαδή η (ε) είναι εφαπτομένη και της C_g , οπότε είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g .

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως στο 1^ο τρόπο.

3^{ος} τρόπος

Από τον 1^ο τρόπο και την (1) έχουμε $\ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1 - 1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} - 1 = -3x_2^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1 - 1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} = -3x_2^2$$

Παρατηρούμε ότι $-3x_2^2 \leq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x_2 = 0$ και ότι $\ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) + \frac{2(x_1 - 1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} \geq 0$

$\left(x_1^2 - 2x_1 + 2 \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x_1^2 - 2x_1 + 2) \geq 0 \text{ και } \frac{2(x_1 - 1)^2}{x_1^2 - 2x_1 + 2} \geq 0 \right)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x_1 = 1$.

Οπότε στα $A(1,1), B(0,2)$ οι C_f, C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

Επιμέλεια απαντήσεων: Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Βαλιάδη Μαρία, Νατάσα Παπαγούλα, Ηλίας Κουντούπης