

Πρώτη
Επιλογή



ΣΥΓΧΡΟΝΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

A.1. Σχολικό βιβλίο σελ 334-335

A.2. Σχολικό βιβλίο σελ 246

A.3. Σχολικό σελίδα 222

A.4. α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

Θέμα Β.

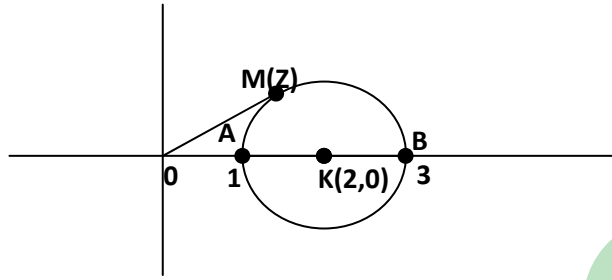
B.1. $|z-2||\bar{z}-2| + |z-2| = z \Leftrightarrow |z-2||\overline{z-2}| + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$

Θέτω $|z-2| = \omega$

$\omega^2 + \omega - 2 = 0$

$(\omega+2)(\omega-1) = 0$

$\omega = 1$ ή $\omega = -2$ (απορ)



$|z-2| = 1 \Rightarrow$ Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με $K(2,0)$, $\rho=1$, με $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$

Αφού ο z κινείται στο παραπάνω κύκλο C , ισχύει $(OA) \leq (OM) \leq (OB) \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 3$

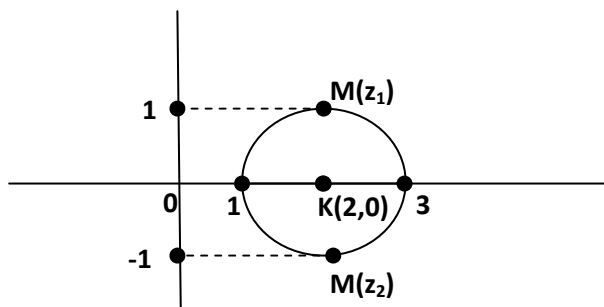
B.2. $w^2 + \beta w + \gamma = 0$

Από τύπους Vietta : $S = z_1 + z_2 = -\beta$ (1) $P = z_1 z_2 = \gamma$ (2)

Έστω $z_1 = x_1 + \psi_1 i$ και $z_2 = x_2 + \psi_2 i$

Από $|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2 \Rightarrow |\psi_1 - \psi_2| = 2$

Αφού η απόσταση των φανταστικών μερών ισούται με $z = 2\rho$, οι εικόνες των z_1, z_2 είναι σημεία αντιδιαμετρικά του παραπάνω κύκλου οπότε :



Άρα , έστω : $z_1 = 2+i$ και $z_2 = 2-i$

Από (1),(2) $\Rightarrow \begin{cases} (2+i) + (2-i) = -\beta \\ (2+i)(2-i) = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = +5 \end{cases}$



$$\mathbf{B.3.} \quad |v|^3 = |a_2 v^2 + a_1 v + a_0| \leq |a_2| \cdot |v|^2 + |a_1| \cdot |v| + |a_0| \leq 3|v| + 3$$

Αν υποθέσουμε ότι $|v| \geq 4$ τότε:

$$|v|^3 \geq 4 \cdot |v|^2 = 3 \cdot |v|^2 + |v|^2 \geq 3 \cdot |v|^2 + 4|v| \geq 3 \cdot |v|^2 + 3 \cdot |v| + 4 > 3|v| + 3 \quad \text{άτοπο.}$$

Θέμα Γ.

$$\mathbf{Γ.1.} \quad (f(x)+x) \cdot (f'(x)+1) = x \Leftrightarrow (f(x)+x) \cdot (f'(x)+x') = x \Leftrightarrow$$

$$2(f(x)+x) \cdot (f(x)+x)' = 2x \Leftrightarrow [(f(x)+x)^2]' = [x^2]' \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + c$$

$$\text{Για } x=0 : (f(0))^2 = c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα : } (f(x)+x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow f(x)+x = \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Η $f(x)+x$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και δεν έχει ρίζα. Οπότε διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)+0=1 > 0$ είναι $f(x)+x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε : } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$



Γ.2. $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} άρα και 1-1.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	○	-	○	+
$g(x)$		↗	↘	↗	
		T.M	T.E.		

$$T_M : g(-1) = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad T_E : g(0) = -1$$

- $(-\infty, -1]$ η $g \uparrow$

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right) = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right], \quad 0 \notin g(\Delta_1)$$

- $[-1, 0]$ η $g \downarrow$

$$g(\Delta_2) = [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2} \right], \quad 0 \notin g(\Delta_2)$$

- $[0, +\infty)$ η $g \uparrow$

$$g(\Delta_3) = [g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [-1, +\infty), \quad 0 \in g(\Delta_3)$$

και αφού η $g \uparrow$ η ρίζα είναι μοναδική.



Γ.3. Έστω η συνάρτηση h με :

$$h(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

- Η h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

- $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t)dt - f(0)\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$

$$h(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt > 0 \text{ διότι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(0) < 0$$

Άρα για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, οπότε η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Θέμα Δ.

Δ.1. Είναι : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} =$$

$$= 5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1)$$

$$\text{Άρα: } f'(1) = 0$$

$$\text{Είναι : } x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$



Δ.2. Είναι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x > 1$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ είναι

$$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$$

Επομένως $g'(x) > 0$, $x > 1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Έστω η συνάρτηση h με $h(x) = \int_x^{x+1} g(u)du$, $x > 1$ και

$$h'(x) = g(x+1) - g(x) > 0 \text{ οπότε η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα,}$$

Οπότε η αρχική σχέση γίνεται ισοδύναμα :

$$h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \Leftrightarrow$$

$$8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4 < 8x^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2(x^2-4) < 0 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Δ.3. Είναι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x > 1$ και $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2}$, $x > 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της σε οποιοδήποτε σημείο της x_0 είναι

$$y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι κυρτή ισχύει :}$$

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

οπότε για $x=1$ είναι :

$$f(1) \geq f'(x_0)(1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)(1 - x_0) + f(x_0) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)(x_0 - 1) - f(x_0) + 1 \geq 0$$

σχέση που ισχύει για κάθε $x_0 > 0$



Άρα $g''(x) > 0$, $x > 1$ άρα η g είναι κυρτή

Έστω συνάρτηση H με $H(x) = (a-1)g(x) - (f(a)-1)(x-a)$, $x > 1$

Παρατηρώ ότι $H(a) = 0$.

$$H'(x) = (a-1)g'(x) - (f(a)-1) = (a-1) \left(g'(x) - \frac{f(a)-1}{a-1} \right) = (a-1)(g'(x) - g'(a))$$

- Αν $x < a$ $g'(x) < g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) < 0$.

Άρα $H'(x) < 0$ οπότε H φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

- Αν $x > a \Rightarrow g'(x) > g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) > 0$.

Άρα $H'(x) > 0$ οπότε H αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Επομένως η $H(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1, +\infty)$.

Επιμέλεια Απαντήσεων :

Για το ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

Ανδριώτης Δημήτρης – Δελή Κατερίνα – Διακοηλίας Κων/νος