ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 234.

Α.2. α)Σ

β)Σ

γ)Λ

δ)Λ

ε)Σ

Α.3. α) $\int_{\alpha}^{\beta} ημx\,dx = -συνβ + συνα$

β) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Θέμα Β.

Β.1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha^2 x + \ln x\right) = \alpha^2 \cdot 1 + \cancel{\ln 1}^{\,0} = \alpha^2$

Β.2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\cancel{x-1}} = 1 \cdot \left(\sqrt{1+3} + 2\right) = 2 + 2 = 4$

Β.3. F συνεχής στο $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$

Θέμα Γ.

Γ.1. Έχουμε : $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 25 + 17 + 6 + 2 = v \Leftrightarrow v = 50$

$f_1\% = \dfrac{v_1}{v} 100\% \Leftrightarrow f_1 = \dfrac{25}{50} 100\% \Leftrightarrow f_1\% = 50\%$

$f_2\% = \dfrac{v_2}{v} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_2\% = \dfrac{17}{50} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_2\% = 34\%$

$f_3\% = \dfrac{v_3}{v} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_3\% = \dfrac{6}{50} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_3\% = 12\%$

$f_4\% = \dfrac{v_4}{v} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_4\% = \dfrac{2}{50} \cdot 100\% \Leftrightarrow f_4\% = 4\%$

Επίσης:

$x_1 v_1 = 6 \cdot 25 = 150$

$x_2 v_2 = 10 \cdot 17 = 170$

$x_3 v_3 = 16 \cdot 6 = 90$

$x_4 v_4 = 20 \cdot 2 = 40$

x_i	v_i	$f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	**50**	**150**
10	17	**34**	**170**
15	6	**12**	**90**
20	2	**4**	**40**
Σύνολα	**v=50**	100	**450**

Άρα $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 450$

Γ.2. $\bar{x}=\dfrac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4}{v} \Leftrightarrow \bar{x}=\dfrac{450}{50} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=9}$

Γ.3. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν μισθό το πολύ 1.000€:

$f_1\% + f_2\% = 50\%+34\% = 84\%$

Γ.4. $s^2 = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2-\bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3-\bar{x})^2 \cdot v_3 + (x_4-\bar{x})^2 \cdot v_4}{v} \Leftrightarrow$

$s^2 = \dfrac{(6-9)^2 \cdot 25 + (10-9)^2 \cdot 17 + (15-9)^2 \cdot 6 + (20-9)^2 \cdot 2}{50} \Leftrightarrow$

$s^2 = \dfrac{225+17+216+242}{50} \Leftrightarrow$

$s^2 = \dfrac{700}{50} \Leftrightarrow \boxed{s^2 = 14}$

Θέμα Δ.

$$f(x)=(x-2)^2 \cdot (x+\alpha)$$

Δ.1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο πολυωνύμων.

$f'(x)=2 \cdot (x-2) \cdot (x-2)' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' = 2(x-2) \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 =$

$(x-2)\left[2(x+\alpha) + x-2\right] = (x-2) \cdot (3x+2\alpha-2)$

Δ.2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$ και είναι παραγωγίσιμη από θεώρημα Fermat $f'(4)=0 \Leftrightarrow 2 \cdot (10+2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 10+2\alpha=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-5}$

Δ.3. Για α=-5

$f(x)=(x-2)^2\cdot(x-5)$

$f'(x)=(x-2)\cdot(3x-12)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(3x-12)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x-2		-	0	+		+	
3x-12		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	

Μονοτονία :

f αύξουσα στο $(-\infty,2]$,
f φθίνουσα στο $[2,4]$,
f αύξουσα στο $[4,+\infty)$

(Σύμφωνα με το θεώρημα για την μονοτονία και την παράγωγο)

Ακρότατα :

Έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=0$
και τοπικό ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=-4$
(Σύμφωνα με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου)

Δ.4. $g(x)=3x^2-12x,\ x\in\mathbb{R}$

$h(x)=6x-24,\ x\in\mathbb{R}$

Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω είναι : $E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|g(x)-h(x)|dx$

Βρίσκουμε τα x_1,x_2 λύνοντας την εξίσωση $g(x)-h(x)=0 \Leftrightarrow$

$3x^2-12x-(6x-24)=0 \Leftrightarrow$

$3x^2-18x+24=0 \Leftrightarrow$

$x=2$ ή $x=4$

Παρατηρούμε ότι : $g(x)-h(x)=f'(x)$ και ακόμη $f'(x)<0$ για $x\in(2,4)$

οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι :

$$E(\Omega)=\int_2^4|f'(x)|dx=-\int_2^4 f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_2^4=-\left(f(4)-f(2)\right)=-(-4-0)=4$$

Β΄ Τρόπος :

Για να βρούμε τα άκρα του ολοκληρώματος λύνουμε την

$g(x)\text{-}h(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$3x^2-18x+24$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $E(\Omega)=\int_2^4 |g(x)\text{-}h(x)|\,dx = \int_2^4 |3x^2\text{-}18x+24|\,dx = -\int_2^4 (3x^2\text{-}18x+24)\,dx =$

$-\left[x^3\text{-}9x^2+24x\right]_2^4 = -(64-144+96)+(8-36+48) = -16+20 = 4$

Επιμέλεια Απαντήσεων :

Για το ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

Δελή Κατερίνα - Διακοηλίας Κων/νος