ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

Α.1. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 251)

Α.2. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 273)

Α.3. Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελίδα 150)

Α.4. **α.)** Λ

β.) Σ

γ.) Σ

δ.) Σ

ε.) Λ

Θέμα Β.

Β.1. $2|z|^2+(z+\bar{z})\cdot i-4-2i=0$

Έστω : $z = x+yi$ τότε

$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Rightarrow$

$2x^2+2y^2-4+(2x-2)i=0 \Rightarrow$

$2x^2+2y^2-4=0$ και $2x-2=0$

$x^2+y^2=2$ $\qquad x=1$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

Άρα $z_1=1+i$ ή $z_2=1-i$

Β.2. $w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left(\frac{(1+i)\cdot(1+i)}{1^2-i^2}\right)^{39}=3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{4\cdot 9+3}=-3i$

Β.3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow$

$|u+w|=|4+4i-1+i-1| \Leftrightarrow$

$|u+w|=|3+4i| \Leftrightarrow |u+3i|=5$

Άρα κύκλος Κ(0,3) $\quad$ ρ=5

Θέμα Γ.

$h(x)=x-\ln(e^x+1)$

$A_f:\mathbb{R}$

Γ.1. $h'(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}e^x=\dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$

$$h''(x)=\left[\left(e^x+1\right)^{-1}\right]'=-1\left(e^x+1\right)^{-2}\cdot\left(e^x+1\right)'=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$$

Άρα η h είναι κοίλη

Γ.2. $e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1}\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\dfrac{e}{e+1}\Leftrightarrow$

$$h(2h'(x))\ln e<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h\left(2\frac{1}{e^x+1}\right)1<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow$$

$$h\left(\frac{2}{e^x+1}\right)<h(1)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}\frac{2}{e^x+1}<1\overset{e^x+1>0}{\Leftrightarrow}2<e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow\boxed{x>0}$$

Γ.3. Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

- **Αν** $u=\dfrac{e^x}{e^{x+1}}$ **τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=\ln1=0$

άρα οριζόντια ασύμπτωτη η y=0 όταν x $\to+\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\text{-}\ln\left(e^x+1\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x} = 1-0=1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left(h(x)\text{-}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\text{-}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right) = 0$$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη η ε: y=x όταν $x\to-\infty$

Γ.4. $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\left(h(x)+\ln2\right)=0 \overset{e^x\neq0}{\Leftrightarrow} h(x)+\ln2=0 \Leftrightarrow$

$$x\text{-}\ln\left(e^x+1\right)+\ln2=0 \Leftrightarrow \ln e^x+\ln\left(\frac{2}{e^x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=\ln1 \overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{2e^x}{e^x+1}=1 \Leftrightarrow 2e^x=e^x+1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Rightarrow x=0$$

Άρα $E=\int_0^1\left|\varphi(x)\right|dx$

Το πρόσημο της φ(x) εξαρτάται από το $\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$ **οπότε στο (0,1)**

$\frac{2e^x}{e^x+1}>1 \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)>0$ **άρα η φ(x) >0 στο (0,1).**

$$E=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right)'dx$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-e^0\ln\left(\frac{2}{2}\right)-\int_0^1 e^x\left(\frac{e^x+1}{2e^x}\right)\cdot\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-0-\int_0^1\frac{e^x+1}{2}\cdot\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\left[\ln\left(e+1\right)-\ln 2\right]=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\ln\left(e+1\right)+\ln 2=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)+\ln\frac{2}{e+1}$$

Θέμα Δ.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ \\ 1,\ x=0\end{cases}$$

Δ.1. Για $x\neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-1}}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

$F(0)=1$

Άρα $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1 \Rightarrow$ **F συνεχής στο $x_0=0$**

Για $x\neq 0$**:**

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$$

Θέτω $g(x)=x\cdot e^x - e^x+1$

$g'(x)=e^x + x\cdot e^x - e^x = x\cdot e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g′	-	0	+
g	↘		↗

Άρα $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x		0	
f′	+	0	+
f	↗		↗

f$\uparrow \mathbb{R}$

Δ.2.α.) $h(x)=\int_1^{2F'(x)} f(u)du$

$h(0)=\int_1^{2F'(0)} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$

Αφού $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

Άρα h(x) =0 ,τουλάχιστον μια ρίζα τη x=0

Για τη μοναδικότητα :

'Εστω : $h(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du$

Έχουμε δείξει ότι h(0)=0. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική ρίζα.

Για x>0 $\Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x-1>0$

Για x<0 $\Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x-1<0$

Οπότε $f(x)=\frac{e^x-1}{x}>0$ **άρα f(x) >0 για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Δηλαδή h(x) = 0 μόνο αν 2f′(x)=1.

Οπότε 2f′(x)=1 $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=f'(0)\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} x=0$

Άρα x=0 μοναδική ρίζα.

β.)

$$x'(t)=2f'(x(t))x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow} 1=2f'(x(t)) \Leftrightarrow f'(x(t))=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t))=f'(0) \overset{\text{1-1 λόγω } f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x(t)=0$$

Άρα $M(x_0,f(x_0)) \Rightarrow M(0,1)$

Δ.3.

$$g(x)=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2(x-2)^2 \Rightarrow$$
$$g(x)=\left(e^x-1+1-e\right)^2(x-2)^2 \Rightarrow$$
$$g(x)=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$

Άρα $g(x)=\left[\left(e^x-e\right)(x-2)\right]^2$

Άρα $g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[\left(e^x-e\right)(x-2)\right]'$

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]$$
$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(x\cdot e^x-2e^x+e^x-e\right)$$
$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(x\cdot e^x-e^x-e\right)$$
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e=0 \Leftrightarrow x=1$$
$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$x \cdot e^x - e^x - e = 0$

Αν $H(x) = x \cdot e^x - e^x - e$, $x \in [1,2]$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η H έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο (1,2)

και επειδή

$H'(x) = x \cdot e^x > 0$ οπότε H ↑, η ρίζα ρ είναι μοναδική

Επιμέλεια Απαντήσεων : Ανδριώτης Δημήτρης ,
Διακοηλίας Κων/νος ,
Δελή Κατερίνα